EINE VERALLGEMEINERUNG DER CW-KOMPLEXE

VON

GÖTZ BRUNNER

ABSTRACT

In the definition of CW-complexes, the one-point space P, respectively the space $P \bigcup *$ with basepoint $*$, play the roll of the only "building-stone". Let $\mathfrak{W}$ be a family of compact spaces. Then the definition of a generalized CW-complex over $\mathfrak{W}$ is obtained from the definition of a CW-complex by replacing P by the spaces of $\mathfrak{W}$ and formation of the mapping cone by a slightly modified construction. Let $CW(\mathfrak{W})*$ denote the category of all pointed spaces which have the homotopy type of a generalized CW-complex over $\mathfrak{W}$. If $\mathfrak{W} = \{P\}$, then $CW(\mathfrak{W})*$ is the category of all pointed CW-spaces. $CW(\mathfrak{W})*$ is closed under the formation of direct sums and of mapping cones, cylinders and tori, and is formally characterized as the smallest such subcategory of Top_* containing the spaces $W \bigcup *$, $W \in \mathfrak{W}$. Following the methods of E. H. Brown, it is proved, that any half exact homotopy functor on $CW(\mathfrak{W})*$ is representable, and any cohomology theory on $CW(\mathfrak{W})^2$ is naturally equivalent to the cohomology theory of an Ω-spectrum; for example, the singular cohomo logy is representable on $CW(\mathfrak{W})^2$ for any family $\mathfrak{W}$ of compact spaces.

1. Einführung

Für die (nicht notwendig zusammenhängenden) CW-Komplexe mit Grundpunkt spielt der Einpunktraum P bzw. der durch Hinzunahme eines Grundpunktes $*$ gebildete Raum $P \bigcup *$ die Rolle des einzigen "Bauelementes": die verwendeten Konstruktionen sind die Bildung direkter Summen und reduzierter Abbildungskegel. Ersetzt man P durch eine Familie $\mathfrak{W}$ kompakter Räume und die Bildung reduzierter Abbildungskegel durch eine dadurch nahegelegte abgewandelte Konstruktion, so führt die Definition der CW-Komplexe zu einer Definition "verallgemeinerter CW-Komplexe über $\mathfrak{W}$". Diese und die zu ihnen homotopieäquivalenten Räume bestimmen eine Kategorie $CW(\mathfrak{W})_*$, die für $\mathfrak{W} = \{P\}$ gerade mit der Kategorie CW_* aller CW-Räume zusammenfällt. CW $\mathfrak{W})_*$ ist abgeschlossen gegenüber der Bildung direkter Summen und

Received February 28, 1972

gegenüber der Bildung von reduziertem Abbildungskegel, -zylinder und -torus und läßt sich formal charakterisieren als die kleinste Unterkategorie von Top_* mit diesen Eigenschaften, die $\mathfrak{W}$ enthält. Mit der Methode von E. H. Brown [1] wird gezeigt, daß jeder (streng additive) halbexakte Homotopiefunktor auf $CW(\mathfrak{W})_*$ darstellbar ist und jede (streng additive) verallgemeinerte Kohomologietheorie auf der Kategorie $CW(\mathfrak{W})^2$ der Paare bis auf Isomorphie durch ein Spektrum definiert wird; so ist insbesondere die singuläre Kohomologie für jede Familie $\mathfrak{W}$ kompakter Räume darstellbar auf $CW(\mathfrak{W})^2$.

Einige Anwendungen dieser Ergebnisse werden in einer späteren Arbeit behandelt.

2. Definition und Eigenschaften verallgemeinerter CW-Räume

Im folgenden sei $\mathfrak{W}$ immer eine Familie kompakter Räume. E^n bezeichne die n-dimensionale Vollkugel mit der $(n-1)$-Sphäre S^{n-1} als Rand. Für $W \in \mathfrak{W}$ heißt $W^n = (W \times E^n) \bigcup *$ n- Zelle über W ($* \notin W \times E^n$) und der Unterraum $\dot{W}^n = (W \times S^{n-1}) \bigcup *$ Rand von W^n. Mit $*$ als Grundpunkt sind W^n und $\dot{W}^n$ wohlpunktierte Räume. Im weiteren haben alle Räume einen Grundpunkt und alle Abbildungen und Homotopien sind grundpunkterhaltend. Ein gemeinsamer ausgezeichneter Punkt p_0 von S^{n-1} und E^n zeichnet in $\dot{W}^n$ und W^n einen Unterraum $W_0^n = (W \times p_0) \cup * \approx W^0$ aus; die Inklusionen seien $\dot{\imath}_n \colon W^0 \approx W_0^n \subset \dot{W}^n$ und $\imath_n \colon W^0 \approx W_0^n \subset W^n$. Die Abbildungen $r_n \colon W^n \to W_0^n$ und $\dot{r}_n \colon \dot{W}^n \to W_0^n$, die jeden Punkt $(w, p) \in W \times E^n$ bzw. $(w, p) \in W \times S^{n-1}$ in (w, p_0) und $*$ in $*$ abbilden sind Retraktionen.

Inder folgenden Definition werden Konstruktionen, die der Bildung von reduziertem Abbildungstorus, -kegel und reduzierter Einhängung entsprechent beschrieben.

Definition 1. Es sei $A \subset X$ eine Cofaserung und $r \colon X \to A$ eine Retraktion. $T_*(f, g)$ sei der reduzierte Abbildungstorus zweier Abbildungen $f, g \colon X \to Y$ mit $f/A = g/A$. Der Quotientenraum, der aus $T_*(f, g)$ entsteht, indem für jeden Punkt $a \in A$ alle Punkte $[a, t] \in T_*(f, g)$, $0 \leqq t \leqq 1$, identifiziert werden mit $f(a) = g(a)$, heißt reduzierter Abbildungstorus bezüglich A von f und g; er wird mi, $T_A(f, g)$ bezeichnet. $T_A(f, (f/A)r)$ heißt reduzierter Abbildungskegel bezüglich A von f. Mit $Y = A$ heißt $T_A(r, r)$ reduzierte Einhängung bezüglich A von X.

Wie man E^n aus E^{n-1} oder aus S^{n-1} und S^{n-1} aus S^{n-2} durch Bildung des reduzierten Abbildungskegels oder der reduzierten Einhängung erhält, so gilt hier:

(1) $W^0 = W \bigcup *$; $\dot{W}^1 = W_0^1 \vee W^0 \approx W^0 \vee W^0$

(2) $W^n = T_{W_0^n}^{n-1}(1_{W^{n-1}}, \tau_{n-1} r_{n-1})$ für $n \geqq 2$

(3) $W^n = T_{W_0^n}^{n}(1_{\dot{W}^n}, \dot{\tau}_n \dot{r}_n)$ für $n \geqq 1$

(4) $\dot{W}^n = T_{W_0^n}^{n-1}(\dot{r}_{n-1}, \dot{r}_{n-1})$ für $n \geqq 2$.

Definition 2. Ein Raum X mit Grundpunkt $*$ heißt verallgemeinerter CW-Komplex über $\mathfrak{W}$, wenn es eine Folge $(X_n)_{n \geqq 0}$ abgeschlossener Unterräume X_n von X gibt, so daß gilt:

(1) $X_0 = \bigvee_J W_\alpha^0$; W_α^0 Kopie von W^0 für jedes $\alpha \in J(W)$, $J(W)$ Indexmenge für jedes $W \in \mathfrak{W}$, $J = \bigcup J(W) \neq \varnothing$.

(2) Für $n \geqq 1$ ist X_n der reduzierte Abbildungskegel bezüglich $\bigvee_J W_{\alpha 0}^r$ einer Abbildung $f_n = \bigvee_J f_\alpha$: $\bigvee_J \dot{W}_\alpha^r \to X_{n-1}$; dabei ist $J = \bigcup J(r, W)$, $J(r, W)$ eine Indexmenge für jedes r mit $1 \leqq r \leqq n$ und $W \in \mathfrak{W}$ und $\dot{W}_\alpha^r$ eine Kopie von $\dot{W}^r$ für $\alpha \in J(r, W)$.

(3) $X = \bigcup_{n \geqq 0} X_n$, X trägt die schwache Topologie bezüglich der Folge $(X_n)_{n \geqq 0}$.

Ein zu einem verallgemeinerten CW-Komplex über $\mathfrak{W}$ homotopieäquivalenter Raum mit Grundpunkt heißt verallgemeinerter CW-Raum über $\mathfrak{W}$. Die von der Klasse der verallgemeinerten CW-Räume über $\mathfrak{W}$ bestimmte volle Unterkategorie von Top_* wird mit $CW(\mathfrak{W})_*$ bezeichnet. Unterkomplexe und relative verallgemeinerte CW-Paare (X, A) über $\mathfrak{W}$, wobei $A \in \mathrm{Top}_*$ ist, werden entsprechend wie bei gewöhnlichen CW-Räumen definiert.

Für $\mathfrak{W} = \{P\}$ mit dem Einpunktraum P erhält man mit $CW(\{P\})_*$ offenbar genau die Kategorie CW_* aller punktierten CW-Räume. Das folgt unmittelbar aus der Definition und aus der Gültigkeit des zellularen Approximationssatzes in CW_*. Ist $P \in \mathfrak{W}$, so umfaßt $CW(\mathfrak{W})_*$ also CW_*.

Die folgenden Eigenschaften gelten unmittelbar bzw. lassen sich entsprechend beweisen wie im Falle gewöhnlicher CW-Räume:

(E1): *$CW(\mathfrak{W})_*$ ist abgeschlossen gegenüber der Bildung direkter Summen.*

(E2): *X sei ein verallgemeinerter CW-Komplex über $\mathfrak{W}$; $0 \subset X$ ist genau dann offen, wenn $0 \cup W_\alpha^0$ offen in W_α^0 für alle $W_\alpha^0 \subset X_0$ und $0 \cap \bar{f}_\alpha[W^r]$ offen in $\bar{f}_\alpha[W^r]$ ist für jede anheftende Abbildung f_α: $\dot{W}^r \to X_{n-1}$; dabei ist $\bar{f}_\alpha$: $W^r \to X_n$ die natürliche Fortsetzung von $\dot{W}^r \xrightarrow{f_\alpha} X_{n-1} \subset X_n$.*

(E3): *Ist (X, A) ein relatives verallgemeinertes CW-Paar, so ist $A \subset X$ eine Cofaserung.*

(E4): *Mit X ist auch $X \times I/_* \times I$ verallgemeinerter CW-Komplex über* $\mathfrak{W}$.

(E5): *Mit jedem Diagramm $X \supset A \xrightarrow{g} Y$ gehört auch $Y \bigcup_g X$ zu* $CW(\mathfrak{W})_*$.

BEWEIS VON (E5). $Z = Y \bigcup_g X$; $p: Y \bigcup X \to Z$ sei die Projektion. Wie folgt wird eine Folge $(Z_n)_{n \geqq 0}$ von Unterräumen von Z bestimmt: $Z_0 = Y_0 \vee \bigvee_J W_\alpha^0$; dabei ist J die Menge der α, für die W_α^0 zu X_0, aber nicht zu A_0 gehört. Für $n \geqq 1$ ist Z_n der reduzierte Abbildungskegel bezüglich $\bigvee_J W_{\alpha 0}^r$ von $\phi_n = \bigvee_J p\phi_\alpha$: $\bigvee_J \dot{W}_\alpha^r \to Z_{n-1}$; dabei ist J die Menge aller α, für die $\phi_\alpha: \dot{W}_\alpha^r \to Y_{n-1}$ anheftende Abbildung für Y ist, oder für die $\phi_\alpha: \dot{W}_\alpha^r \to X_{k-1}$, $1 \leqq r \leqq k \leqq n$, anheftende Abbildung von $X \setminus A$ ist und folgende Bedingung erfüllt: Bezeichnet $K(\phi_\alpha)$ den kleinsten Unterkomplex von X, der Bild ϕ_α enthält, so ist $p[K(\phi_\alpha)] \subset Z_{n-1}$ und, wenn $k < n$ ist, ist n die kleinste Zahl, so daß diese Bedingung erfüllt ist. Für $n \geqq 0$ ist dann $Y_n \subset Z_n$ und aus der Kompaktheit der $W \in \mathfrak{W}$ folgt, daß es zu jeder anheftenden Abbildung ϕ_α von $X \setminus A$ ein n gibt mit $p[K(\phi_\alpha)] \subset Z_{n-1}$. Daher ist $Z = \bigcup_{n \geqq 0} Z_n$. Daß Z die schwache Topologie bezüglich der Unterräume Z_n, $n \geqq 0$, trägt, folgt unmittelbar mit (E2).

Sei $X_0 = W^0$ ($W \in \mathfrak{W}$) und $X = X_1$ der reduzierte Abbildungskegel bezüglich W_0^1 von $\phi: \dot{W}^1 = W_0^1 \vee W^0 \to X_0$ mit $\phi[W_0^1] = *$ und $\phi / W^0 = 1_{W^0}$. Wegen $X \simeq *$ gehört daher der Einpunktraum $*$ zu $CW(\mathfrak{W})_*$. Mit (E4) und (E5) ergibt sich:

FOLGERUNG. $CW(\mathfrak{W})*$ ist abgeschlossen gegenüber der Bildung von reduziertem Abbildungstorus, -zylinder und -kegel.

3. Darstellbarkeit halbexakter Funktoren

Im folgenden sei $\mathfrak{C}_*$ eine $CW(\mathfrak{W})_*$ umfassende Kategorie punktierter Räume, die abgeschlossen ist gegenüber der Bildung von direkten Summen und von Abbildungstorus, -zylinder und -kegel.

Sei (Y, B) ein Paar von Räumen aus $\mathfrak{C}_*$, $i: B \subset Y$ die Inklusion und $h: W^0 \to B$ ($W \in \mathfrak{W}$) eine Abbildung. Dann bezeichnet $[(W^n, \dot{W}^n), (Y, B)]_h$ die Menge der Klassen von rel W_0^n homotopen Abbildungen $f: (W^n, \dot{W}^n) \to (Y, B)$ mit $f / W_0^n = h$; entsprechend sind $[\dot{W}^n, Y]_h$ und $[\dot{W}^n, B]_h$ definiert. Die Inklusion $(\dot{W}^1, W^0) \subset (\dot{W}^1, \dot{W}^1)$ bestimmt eine Abbildungsfolge

$$(\dot{W}^1, W^0) \to (\dot{W}^1, \dot{W}^1) \to (W^1, \dot{W}^1) \to (\dot{W}^2, W^1) \to (\dot{W}^2, \dot{W}^2) \to \cdots$$

in der die Abbildungen Inklusionen und jedes Paar der reduzierte Abbildungskegel bezüglich (W^0, W^0) der vorangegangenen Abbildung sind. Diese geht über in die exakte Homotopiesequenz

$$\cdots \to [(W^n,\dot W^n),\ (Y,B)]_h \to [\dot W^n, B]_h \overset{i_\#}{\to} [\dot W^n, Y]_h \to \cdots$$
$$\cdots \to [(W^1,\dot W^1),(Y,B)]_h \to [\dot W^1, B]_h \overset{i_\#}{\to} [\dot W^1, Y]_h$$

Ist für alle $W \in \mathfrak{W}$, $h\colon W^0 \to B$ und r, $1 \leqq r \leqq n$, die induzierte Abbildung $i_\#$ ein Isomorphismus, so ist dann stets $[(W^r,\dot W^r),(Y,B)]_h = 0$, d.h. jede Abbildung $f\colon (W^r,\dot W^r) \to (Y,B)$ mit $f/W_0^r = h$ ist homotop rel $\dot W^r$ zu einer Abbildung $W^r \to B$. Jede Abbildung $(X,A) \to (Y,B)$ ist daher homotop rel A zu einer Abbildung $X \to B$, wenn (X,A) ein relatives verallgemeinertes CW-Paar über $\mathfrak{W}$ mit $X = X_n$ ist.

Daraus ergeben sich mit denselben Argumenten wie im Falle der gewöhnlichen CW-Räume (vgl. [4]) das folgende Lemma und die beiden Korollare.

LEMMA. *Für alle $W \in \mathfrak{W}$ und alle Abbildungen $h\colon W^0 \to Y$ sei die von $f\colon Y \to Y'$ induzierte Abbildung*

$$f_\#\colon [\dot W^r, Y]_h \to [\dot W^r, Y']_{fh}$$

bijektiv, wenn $1 \leqq r \leqq n$ ist, und surjektiv für $r = n+1$. Ist (X,A) ein relatives verallgemeinertes CW-Paar über $\mathfrak{W}$ und $X = X_n$, $g\colon A \to Y$ eine Abbildung und $g'\colon X \to Y'$ eine Fortsetzung von $fg\colon A \to Y'$, dann gibt es eine Fortsetzung $\bar g\colon X \to Y$ von g auf X, so daß $f\bar g \simeq g'(\mathrm{rel}\, A)$ ist.

KOROLLAR 1. *Ist die von $f\colon Y \to Y'$ induzierte Abbildung*

$$f_\#\colon [\dot W^r, Y]_h \to [\dot W^r, Y']_{fh}$$

bijektiv für alle $W \in \mathfrak{W}$, alle Abbildungen $h\colon W^0 \to Y$ und alle $r \geqq 1$, so ist $f_\#\colon [\ ,Y] \to [\ ,Y']$ eine natürliche Äquivalenz auf $CW(\mathfrak{W})_*$.

KOROLLAR 2. *Gelten für $f\colon Y \to Y'$ die Voraussetzungen von Korollar 1 und sind $Y, Y' \in CW(\mathfrak{W})*$, so ist f eine Homotopieäquivalenz.*

Ist $H\colon \mathfrak{C}_* \to \mathrm{Men}_*$ ein kontravarianter homotopieinvarianter Funktor und $Y \in \mathfrak{C}_*$, so definiert jedes Element $u \in H(Y)$ eine natürliche Transformation $\boldsymbol{u}\colon [\ ,Y] \to H$ durch: $\boldsymbol{u}([f]) = H(f)u$ für alle $X \in \mathfrak{C}_*$ und $[f] \in [X,Y]$.

SATZ 1. *$H\colon \mathfrak{C}_* \to \mathrm{Men}_*$ sei ein halbexakter (streng additiver) Funktor, $Y \in \mathfrak{C}_*$ und $u \in H(Y)$. Dann gibt es ein relatives verallgemeinertes CW-Paar (Y',Y) über $\mathfrak{W}$ und ein Element $u' \in H(Y')$ mit $u'/Y = u$, so daß $\boldsymbol{u}'\colon [\ ,Y'] \to H$ eine natürliche Äquivalenz auf $CW(\mathfrak{W})_*$ ist.*

BEWEIS. Für $m \geqq 1$, $W \in \mathfrak{W}$ und $\alpha \in H(W^0)$ sei $K_\alpha^m = (H(\dot\imath_m))^{-1}(\alpha) \subset H(\dot W^m)$ das Urbild von α unter $H(\dot\imath_m)$ ($\dot\imath_m\colon W^0 \approx W_0^m \subset \dot W^m$); da $H(\dot\imath_m)$ surjektiv ist

$(\dot{r}_m \dot{t}_m = 1_{W^0})$, ist $K_\alpha^m \neq \emptyset$. Es genügt, Y' und u' so zu bestimmen, daß für alle $W \in \mathfrak{W}$, $\alpha \in H(W^0)$, $[h_\alpha] \in [W^0, Y']$ mit $u'([h_\alpha]) = \alpha$ und $m \geqq 1$ die Abbildung $u' : [\dot{W}^m, Y']_{h_\alpha} \to K_\alpha^m \subset H(\dot{W}^m)$ bijektiv ist. Daraus folgt unter Verwendung des Lemmas in der üblichen Weise (vgl. [4]), daß $u' : [X, Y'] \to H(X)$ bijektiv ist für alle $X \in CW(\mathfrak{W})_*$.

Mit der disjunkten Vereinigung J aller $H(\dot{W}^n)$, $W \in \mathfrak{W}$, $n \geqq 1$, als Indexmenge sei $Y_0 = Y \vee \bigvee_J \dot{W}_\alpha^n$; dabei ist $\dot{W}_\alpha^n$ Kopie von $\dot{W}^n$ für $\alpha \in H(\dot{W}^n)$. Wegen der strengen Additivität von H induzieren die Inklusionen $i : Y \subset Y_0$ und $i_\alpha : \dot{W}^n \approx \dot{W}_\alpha^n \subset Y_0$ einen Isomorphismus $H(Y_0) \approx H(Y) \times \bigtimes_J H(\dot{W}^n)$. Es gibt daher ein $u_0 \in H(Y_0)$ mit $H(i)u_0 = u$, $H(i_\alpha)u_0 = \alpha$; d.h. es ist $u_0 i_\# = u$ und alle Abbildungen $u_0 : [\dot{W}^n, Y_0] \to H(\dot{W}^n)$, $W \in \mathfrak{W}$, $n \geqq 1$, sind surjektiv. Natürlich ist für jedes $W \in \mathfrak{W}$ auch $u_0 : [W^0, Y_0] \to H(W^0)$ surjektiv, da $\dot{W}^1 = W^0 \vee W^0$ ist.

Für jedes $n \geqq 1$ werden nun $Y_n \in \mathfrak{C}_*$ und $u_n \in H(Y_n)$ so bestimmt, daß folgende Eigenschaften gelten:

(1) *$Y_{n-1} \subset Y_n$ und $H(i_{n-1})u_n = u_{n-1}$ $(i_{n-1} : Y_{n-1} \subset Y_n)$,*

(2) *Für alle $W \in \mathfrak{W}$, $\alpha \in H(W^0)$, $[h_\alpha] \in [W^0, Y_{n-1}]$ mit $u_{n-1}[h_\alpha] = \alpha$ ist $u_n : [\dot{W}^q, Y]_{i_{n-1}h_\alpha} \to K_\alpha^q$ surjektiv für $q \geqq 1$ und injektiv auf Bild $i_{n-1\#}$, wenn $1 \leqq q \leqq n$ ist.*

Sind Y_{n-1}, u_{n-1} bereits definiert, so werden Y_n, u_n wie folgt bestimmt: $J(W, q, \alpha)$, $W \in \mathfrak{W}$, $1 \leqq q \leqq n$, $\alpha \in H(W^0)$, sei die Menge aller Paare $g = ([g^1], [g^2])$ von Homotopieklassen $[g^1], [g^2] \in [\dot{W}^q, Y_{n-1}]_{h_\alpha}$ ($[h_\alpha] \in [W^0, Y_{n-1}]$ mit $u_{n-1}[h_\alpha] = \alpha$) mit $[g^1] \neq [g^2]$ und $u_{n-1}[g^1] = u_{n-1}[g^2]$. Für jedes $g \in J(W, q, \alpha)$ sei $\dot{W}_g^q$ Kopie von $\dot{W}_g^q$ und $i_g : \dot{W}_J^q \approx \dot{W}^q$. Mit der disjunkten Vereinigung J aller $J(W, q, \alpha)$ als Indexmenge ist dann Y_n der reduzierte Abbildungstorus bezüglich $\bigvee_q W_{go}^q$ der Abbildungen

$$g_1 = \bigvee_J g^1 i_g, \; g_2 = \bigvee_J g^2 i_g : \bigvee_J \dot{W}_g^q \to Y_{n-1}$$

Mit $i_{n-1} : Y_{n-1} \subset Y_n$ ist $[i_{n-1}]$ ein Gleicher von $[g_1]$, $[g_2]$ (in der Homotopiekategorie von $\mathfrak{C}_*$) und es gilt $H(g_1)u_{n-1} = H(g_2)u_{n-1}$. Also gibt es ein Element $u_n \in H(Y_n)$, so dass $H(i_{n-1})u_n = u_{n-1}$, das Diagramm auf der folgenden Seite also kommutativ ist:

Nach Konstruktion von Y_n ist u_n injektiv auf Bild $i_{n-1\#}$ für $1 \leqq q \leqq n$ insbesondere ist offenbar auch u_n injektiv auf Bild $i_{n-1\#}$ für $i_{n-1\#} : [W^0, Y_{n-1}] \to [W^0, Y_n]$. Für $[f] \in [\dot{W}^q, Y_{n-1}]_{i_{n-1}h_\alpha}$ ist $u_n[f] \in K_\alpha^q$ und es ist nur noch die

$$\begin{tikzcd}
{[\dot W^q, Y_{n-1}]_{h\alpha}} \arrow[rr, "u_{n-1}"] \arrow[dr, "i_{n-1\#}"'] & & H(\dot W^q) \\
& {[\dot W^q, Y_n]_{i_{n-1}h\alpha}} \arrow[ur, "u_n"'] &
\end{tikzcd}$$

Surjektivität zu zeigen: Nach Definition von Y_0 ist $u_{n-1}: [\dot W^q, Y_{n-1}] \to H(\dot W^q)$ surjektiv für alle $W \in \mathfrak{W}$, $q \geqq 1$. Zu jedem $\gamma \in K^q_\alpha \subset H(\dot W^q)$ gibt es also eine Abbildung $f_\gamma: \dot W^q \to Y_{n-1}$ mit $u_{n-1}[f_\gamma] = \gamma$. Dann gilt: $u_n[i_{n-1}f_\gamma \dot t_q] = u_{n-1}[f_\gamma \dot t_q] = H(\dot t_q)\gamma = \alpha = u_n[i_{n-1}h_\alpha]$. Aus der Injektivität von u_n folgt $[i_{n-1}f_\gamma \dot t_q] = [i_{n-1}h_\alpha]$. Es gibt daher eine zu $i_{n-1}f_\gamma$ homotope Abbildung $f'_\gamma: \dot W^q \to Y_n$ mit, $f'_\gamma / W^q_0 = i_{n-1}h_\alpha$, denn $(\dot W^q, W^q_0)$ hat die Homotopieerweiterungseigenschaft; es folgt:

$$[f'_\gamma] \in [\dot W^q, Y_n]_{i_{n-1}h} \quad \text{und} \quad u_n[f'_\gamma] = \gamma .$$

Für Y_n, u_n gelten also die Eigenschaften (1) und (2). Daraus und aus der Konstruktion der Y_n folgt, daβ (Y', Y) ein relatives verallgemeinertes CW-Paar über $\mathfrak{W}$ ist, wenn man $Y' = \bigcup_{n \geqq 0} Y_n$ mit der schwachen Topologie bezüglich der Unterräume Y_n versieht, und daβ es ein $u' \in H(Y')$ mit $u'/Y_n = u_n$ und $u'/Y = u$ gibt, so daβ für alle $W \in \mathfrak{W}$, $q \geqq 1$ und $h_\alpha: W^0 \to Y'$ die Abbildung $u': [\dot W^q, Y']_{h_\alpha} \to K^q_\alpha$ bijektiv ist.

Wie anfangs bemerkt, ist damit der Satz bewiesen.

Satz 2. *$CW(\mathfrak{W})^2$ sei die Kategorie der Paare (X, A) verallgemeinerter CW-Räume über $\mathfrak{W}$, $\mathscr{H} = \{H^q, \delta^q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ eine streng additive Kohomologietheorie auf $CW(\mathfrak{W})^2$. Dann gibt es ein Ω-Spektrum $\mathfrak{Y} = \{Y_q, h_q\}_{q \in \mathbb{Z}}(Y_q \in CW(\mathfrak{W})_*$, $h_q: Y_q \to \Omega Y_{q+1}$ induziert eine natürliche Äquivalenz $h_{q\#}: [\ , Y_q] \to [\ , \Omega Y_{q+1}]$ auf $CW(\mathfrak{W})_*)$, so daβ $\mathscr{H}$ isomorph zu der von $\mathfrak{Y}$ definierten* Kohomologietheorie *$\mathscr{H}(\mathfrak{Y})$ ist.*

Zu beachten ist nur, daβ jedes Paar (X, A) die Homotopieerweiterungseigenschaft hat und — wie bei CW-Räumen — die Mayer-Vietoris-Sequenz jedes Tripels $(X_1 \bigcup_D X_2, X_1, X_2)$ exakt ist. Y_q ist dann der darstellende Raum des reduzierten Kohomologiefunktors $\tilde H^q: CW(\mathfrak{W})_* \to \mathrm{Men}_*$, die für alle $X \in CW(\mathfrak{W})_*$ bestehende Isomorphie $[X, Y_q] \approx \tilde H^q(X) \approx \tilde H^{q+1}(\Sigma_* X) \approx [\Sigma_* X, Y_{q+1}] \approx [X, \Omega Y_{q+1}]$ definiert eine natürliche Äquivalenz $t_q: [\ , Y_q] \to [\ , \Omega Y_{q+1}]$ auf

$CW(\mathfrak{W})_*$ und es gibt daher wegen $Y_q \in CW(\mathfrak{W})_*$ eine Abbildung $h_q : Y_q \to \Omega Y_{q+1}$, so daβ $t_q = h_q$ ist.

FOLGERUNG. Für jede Familie $\mathfrak{W}$ kompakter Räume ist die singuläre Kohomologietheorie mit Koeffizienten in G natürlich äquivalent zu der durch ein Ω-Spektrum $\mathfrak{Y} = \{Y_q, h_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$, $Y_q \in CW(\mathfrak{W})_*$, definierten Kohomologietheorie (auf $CW(\mathfrak{W})_*$). Für die Y_q gilt: $[W, Y_q] \approx H^q(W; G)$ und $[\dot{W}^n, Y_q] \approx H^q(W \times S^{n-1}; G)$ für $n \geqq 1$. Ist $H^q(W; G) = 0$ für alle $W \in \mathfrak{W}$, so benötigt man für die Konstruktion von Y_q nur reduzierte Einhängungen $\Sigma_*^n W^0$ bzw. reduzierte Kegel über diesen Einhängungen.

LITERATUR

1. E. H. BROWN *Cohomology theories*, Ann. of Math **75** (1962), 467–484.
2. E. H. BROWN, *Abstract homotopy theory*. Ann. of Math **82** (1965), 79–85.
3. A. DOLD, *Halbexakte Homotopiefunktoren*, Lecture Notes in Mathematics 12, Springer-Verlag, 1966.
4. E. H. SPANIER, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

MATHEMATICHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT DORTMUND
DORTMUND, WEST GERMANY